Komplexní Doučování pro Vysoké Školy

Lineární algebra - 4MM101, 4MM106

Příklad 1 *Určete inverzní matici k matici* $\boldsymbol{A}$ *a podle definice inverzní matice proveďte zkoušku správnosti výpočtu, jestliže*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 1.
Aby mělo vůbec smysl počítat inverzní matici z dané matice, musí být daná matice nutně regulární. Univerzálním postupem pro výpočet inverzní matice je přidání příslušné jednotkové matice vedle dané matice, t.j.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

Postup je jednoduchý. Je třeba převést úplnou Gaussovu a Jordanovu eliminační metodu tak, aby jednotková matice zůstala na levé straně. Pokud se nám to podaří, pak to, co zůstane na pravé straně, bude naše hledaná inverzní matice, takže nejdříve přejdeme k provedení Gaussovy eliminační metody. V prvním kroku prohodíme 1. a 2. řádek matice (1), tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2}$$

Vidíme, že pod hlavní diagonálou jsou všechny nuly, a tím jsme dokončili Gaussovu eliminační metodu. Nyní pokračujeme Jordanovou eliminační metodou a vynásobíme 3. řádek matice (2) číslem -1 a přičteme jej ke 2. řádku a zároveň přičteme 3. řádek k 1. řádku, tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3}$$

V posledním kroku přičteme 2. řádek matice (3) k 1. řádku, t.j.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{4}$$

Vidíme, že na levé straně matice (4) jsme získali jednotkovou matici[1], čímž je celý proces dokončen. Vše, co vzniklo za dělící čarou vpravo, je naše hledaná inverzní

[1] Pokud by se nám to nepodařilo, znamenalo by to, že daná matice byla singulární, a tudíž by neexistovala žádná inverzní matice

matice $\mathbf{A}^{-1}$. Zadání však ještě není dokončeno, protože je třeba provést kontrolu správnosti a zjistit, zda je náš výsledek skutečně inverzí dané matice. K této kontrole použijeme definici inverzní matice ($\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}$) a provedeme maticové násobení naší inverzní matice s danou maticí, podobně jako v příkladu 6, t.j.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Vidíme, že součin obou matic nám dává jednotkovou matici, a proto je námi vypočtená inverzní matice správná.

Odpověď: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Příklad 2 *Z nasledujúci maticové rovnice vypočtěte neznámou matici* $\boldsymbol{X}$ *a uveďte pro které matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ *se dá matice* $\boldsymbol{X}$ *z této rovnice osamostatnit, jestliže*

$$\mathbf{X} + \mathbf{A} = 4\mathbf{A} - \mathbf{XC}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 2.

Nejdříve musíme z dané rovnice vyjádřit neznámou matici $\mathbf{X}$. Při všech úpravách, které budeme provádět, musíme mít na paměti následující základní pravidla, a to $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}$ a $\mathbf{AJ} = \mathbf{JA} = \mathbf{A}$. Nejprve musíme přehodit všechny neznámé matice $\mathbf{X}$ na jednu stranu a vše ostatní na druhou stranu.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} + \mathbf{XC} &= 4\mathbf{A} - \mathbf{A} \quad &| \, (4\mathbf{A} - \mathbf{A} = 3\mathbf{A}) \\ \mathbf{X} + \mathbf{XC} &= 3\mathbf{A} \\ \mathbf{X}(\mathbf{J} + \mathbf{C}) &= 3\mathbf{A} \quad &| \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{X}(\mathbf{J} + \mathbf{C})(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} &= 3\mathbf{A}(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{X} &= 3\mathbf{A}(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Vidíme, že matematické úpravy v (6) jsou možné pouze tehdy, pokud existuje inverzní matice $(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1}$. Ta existuje pouze tehdy, je-li $(\mathbf{J} + \mathbf{C})$ regulární. Pokud by $(\mathbf{J} + \mathbf{C})$ nebylo regulární, pak bychom daný postup nemohli použít. Dále dosadíme matice ze zadání do výsledku pro $\mathbf{X}$, přičemž $\mathbf{J}$ považujeme za jednotkovou matici, tedy:

$$\mathbf{X} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \tag{7}$$

Dále upravíme (7) vynásobením první matice číslem 3 a současne udeláme součet matic v závorce, t.j:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{8}$$

Výslednou inverzní matici řešíme přesně jako v příkladu 14 s tím rozdílem, že tentokrát se jedná o matici 2x2[2]., t.j.:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Výsledek (10) dosadíme do (7) a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Odpověď: $\mathbf{X} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ □

Příklad 3 *Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= -9 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení 3.
Nejprve zapíšeme danou soustavu rovnic v maticovém tvaru jako:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Dále pojmenujeme jednotlivé členy v maticovém tvaru (12). Matice na začátku bude matice nám známé soustavy $\mathbf{A}$, za ní bude následovat náš neznámý vektor $\vec{x}$ a za rovná se je vektor pravých stran, který označíme jako $\vec{b}$, tedy:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \vec{b} \qquad | \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \end{aligned} \tag{13}$$

Nyní máme vyjádřený neznámý vektor $\vec{x}$, který stačí vypočítat. K tomu nám stačí vypočítat inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$. Jinými slovy, soustavu rovnic můžeme metodou inverzní matice vypočítat pouze tehdy, je-li matice soustavy dána regulární maticí.

[2]Inverzní matici obecní matice 2x2 vypočítáme takto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

Pokud by tedy matice soustavy nebyla čtvercová nebo byla singulární, pak bychom museli řešit maticovou rovnici pouze Gaussovou nebo Jordanovou eliminační metodou. Do rovnice (13) dosadíme čísla ze zadání, tedy:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -28 \\ 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

Odpověď: $\vec{x} = (-2, 1)$. $\square$

...